ファインマン経路を使ってトンネル時間を考える

理化学研究所　フロンティア　ナノ電子材料研究チーム
山田徳史*

概要

「粒子がポテンシャル障壁をトンネルするときどれだけ時間がかかるのか」というトンネル時間の問題に対し、実時間ファインマン経路積分によるアプローチを行う。トンネル時間は「干渉的選択肢」であり、異なるトンネル時間の間の干渉のためトンネル時間の確率密度は定義できないと考えられる。しかし「トンネル時間の拡がりの幅」を考えることはできる。障壁の高さが一定でない場合に面白いことが起こりうる。まずトンネル時間の拡がりの幅が狭くなる可能性がある。薄くて高い障壁の場合には実際そうなる。さらに、$\hbar$/(障壁の高さの揺らぎ) よりも十分大きなスケールでトンネル時間を考えるならば、「粗視化されたトンネル時間に対する近似的確率」を導入できる可能性がある。

1　トンネル時間の問題

1.1　どんな問題か

量子力学では粒子は自分よりエネルギーの高い山を「通過」して反対側に抜けていくことがある。この「トンネル効果」は波動関数が山の向こう側にしみ出すことによって起こるのであるから、本質的に波動現象である。トンネル効果に関わる問題では通常「透過確率」や「反射確率」が興味の対象である。透過確率、反射確率の概念[1] 及びその計算方法はよく確立されている事柄である。しかし時として我々はトンネル確率以上のことを問うてみたくなる。例えば、

* 現在の連絡先：〒305-0047 茨城県つくば市千現 1-2-1 金属材料技術研究所 極高真空場ステーション； 電子メール：yamada@nrim.go.jp

[1] 透過フラックスの入射フラックスに対する比をいきなり透過確率と呼んでいるテキストを見かけるが、これはいかがなものか？量子力学ではまず位置や運動量といったオブザーバブルに対して確率が定義されるのだ、と教わる。そして波動関数を使ってそのような確率を計算する方法を習得する。ところがトンネル効果のところでいきなりフラックスを使って確率が定義される。これにはちょっと違和感を覚える。それまで教わってきたオブザーバブルの確率と一体どういう関係にあるのか、まったく別物なのか？事情をはっきりさせるためには次のようにすればよい。波束によるトンネルを考え、十分時間が経った後に山の向こう側に粒子を見出す確率を透過確率と定義する。つまり、透過確率を「位置オブザーバブルに対する確率」として定義する。波束の広がりが十分大きな単色波的状況を考えると、この透過確率は フラックスの比 で近似できることがわかる。こうした手続きを踏んだ後に フラックスの比 を透過確率と呼ぶことが正当化される。

「粒子がトンネル効果で障壁を通過、反射するときどれだけ時間がかかるのか？」

これがトンネル時間の問題である。これは、本質的に波動現象であるトンネル効果を、通過時間という粒子的描像で理解したいという願望の現れである。

「トンネル効果と時間」というとまず思い浮かぶのは原子核のアルファ崩壊における寿命（半減期）であろう。例えばラジウム原子核の半減期は約1600年である。すなわち多くのラジウム原子核を用意しておいたとすると、アルファ崩壊によって約1600年後にはその数は半分に減っている。しかしこれはアルファ粒子がポテンシャルの山を通過するのに約1600年かかることを意味しているわけではない。おそらくはもっと短い「トンネル時間」で通過しているのではなかろうか？このようにトンネル時間の問題で問うているのは、寿命とは別の事柄である。トンネル時間に関する議論の歴史は量子力学自身の歴史と同じくらいに古く、未だにその議論は続いている。最近ではナノテクノロジーの発達がトンネル時間の問題を研究する新たな動機となっているようである。トンネル効果を利用したデバイスの動作速度は究極的にはトンネル時間で決まっているのではないか、という見方がその典型である。一方実用的観点とは別に、「量子力学における時間の特殊性[2]」といった基礎的な観点からもトンネル時間の問題は興味を持たれている[3]。

1.2 代表的な考え方

さてトンネル時間をどう考えるか、従来の代表的な考え方を簡単に紹介する。雰囲気をつかんでいただくことを目的とするので、大まかな説明にとどめる。原論文では一般的な障壁をも扱っている場合もあるが、ここでは下図のような一次元の矩形障壁に限って、その内容を紹介する。入射粒子は障壁の左（$x < 0$）側から平面波（波数 $k > 0$）、あるいは波束の状態でやってくる。

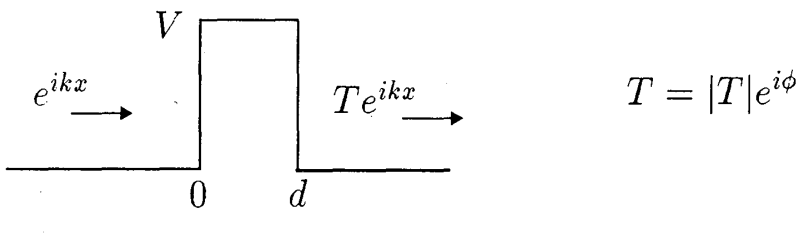


図 1: トンネル効果

[2] 量子力学では時間はパラメータであり物理量（オブザーバブル）ではないということ。

[3] 仮に時間がオブザーバブルであればトンネル時間（もしあれば）もオブザーバブルとなろう。しかし、逆は成り立たないのではないか? 著者は、量子力学で時間がパラメータであるということはトンネル時間の問題にとってそれほど重大な障害ではないように思う。

周知の通り、$x>d$ において e^{ikx} のように振る舞う固有関数 $u_k(x)$ は

$$u_k(x)=\begin{cases} e^{ikx}+Re^{-ikx} & ,\ x<0 \\ Te^{ik(x-d)} & ,\ x>d \end{cases} \tag{1}$$

と書ける。複素係数の R と T は、粒子のエネルギー $E\,(=(\hbar k)^2/(2m))$、障壁の高さ V、障壁の幅 d の関数で、求め方は量子力学の教科書には必ず取り上げられている。R を「反射振幅」、T を「透過振幅」と呼ぶことにする。なお、トンネル時間というときには一般に「反射時間」と「透過時間」の両方が議論の対象になるが、本論では「透過時間」のみを考える。

トンネル時間については以下に取り上げるもの以外にもいろいろな考え方がある。レビューとして [1–7] をあげておく。日本語による解説が [8] にある。

（１）波束のピークの運動を追いかける [9–11]。障壁の前後に２点 $x_1,\ x_2$ をとる。この２点は障壁から十分遠く、そこでは波束のピークは明確に定義できるとする。初期時刻において入射波束のピークは $x=x_1$ にあり、この波束は波数 $k_0>0$ 付近の平面波を重ね合わせて作ってあるとする。波束のピークは速度 $\hbar k_0/m$（m は粒子の質量）で障壁に向かって進む。十分時間が経つと、波動関数は透過波束と反射波束の空間的に重ならない二つの部分に別れ、それらのピークはそれぞれ $\hbar k_0/m$ と $-\hbar k_0/m$ の速度で障壁から離れていく。このとき $x=x_2$ に透過波束のピークが到達する時刻は障壁の有無で異なるので、その差からトンネル時間を割り出そうと考えるのは自然なアイデアである。こうして割り出された“トンネル時間”は位相時間と呼ばれ、

$$\hbar\,\frac{\partial\phi}{\partial E}\bigg|_{E=E_0} \tag{2}$$

となる。ϕ は T の位相、$E_0=(\hbar k_0)^2/(2m)$ である。この方法では、入射波のピークが障壁に到達した時刻と、透過波のピークが障壁から出た時刻を直接考えたわけではないことに注意されたい。実際には障壁の付近では入射波、反射波、透過波の干渉により、入射波や透過波は明確なピークを持たない。そこで、障壁から遠い地点におけるピークの運動を、古典的粒子の運動のイメージにもとづいて障壁付近まで外挿し、外挿によって考えられた仮想的なピークが障壁を通過するのに要する時間を求めたのである。（波束のピークで考える限り、こうした間接的な方法を取らざるを得ないだろう。）しかしこの仮想的なピークは実際の波束の運動では生じないものであり、位相時間 (2) を「実際に波束のピークが障壁に入ってから出るまでの時間」と考えることはできない。位相時間をもってトンネル時間と考えるのには無理がある。

（２）障壁を時間的に揺する。もしトンネル時間なるものが存在するならば、揺する時間スケール τ がトンネル時間より長いか短いかで、トンネルの様子（トンネル確率など）に違いが出るはずである。そこで、ある τ_c を境にしてトンネルの様子が違ってくるようであれば、その τ_c をトンネル時間と同定してよいだろう。Büttiker と Landauer [12]

はポテンシャルの高さが $V(t) = V_0 + V_1\cos(2\pi t/\tau)$ に従い周期 τ で振動する場合を考えた（$V_1 \ll V_0$）。エネルギー E の粒子を入射させると、透過粒子のエネルギーは E から $\hbar\omega$（$\omega \equiv 2\pi/\tau$）の整数倍だけずれうる。障壁が時間変化することによるトンネルの様子の変化を特徴付ける量として彼らは、「透過粒子のエネルギーが $E \pm \hbar\omega$ に見出される確率 $P_\pm$」を考えた。そして、不透明な（透過確率の小さな）障壁の場合に、$P_\pm$ の値は $\tau > d/v_E$ では小さく、$\tau < d/v_E$ では大きいことを示した（$v_E \equiv \sqrt{2(V_0 - E)/m}$）。つまり、$\tau_c = d/v_E$ を境にして $P_\pm$ の振る舞いは大きく異なる。従って d/v_E がトンネル時間だということになる。d/v_E は

$$-\hbar \frac{\partial \ln|T|}{\partial V}\bigg|_{V=V_0} \tag{3}$$

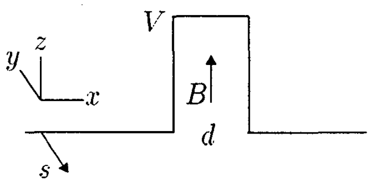
と表すことができる（矩形の不透明な障壁の場合）。一方、高木 [13] は、障壁の高さと幅が、それぞれ $V(t) = V_0/(1+t/\tau)^2$、$d(t) = d_0(1+t/\tau)$ に従って時間変化する場合を考えた[4]。障壁が時間的に変動するので、前回と同様に透過粒子のエネルギーは入射エネルギー E から一般にずれる。波束による障壁通過を考えよう。障壁が時間変化することによるトンネルの様子の変化を特徴付ける量として高木は、「透過波束のエネルギーの不定性 ΔE_T と入射波束のエネルギーの不定性 ΔE との比 $\Delta E_T/\Delta E$ の1からのずれ」を考えた。そしてずれは τ が

$$\frac{2m}{\hbar}\frac{\partial^2\phi}{\partial k^2}\bigg|_{k=k_0} \tag{4}$$

よりも小さい場合に顕著になることを示した。k_0 は入射波束の中心波数である。(4) は矩形の不透明な障壁の場合には $\hbar^2 k_0/(m^2 v_E^3)$ となり、(3) とは定性的にも定量的にも異なる。特に、(3) は障壁の幅 d に比例するのに対し、(4) は幅に依存しない。このように、ある時間スケール τ で障壁を揺すり、揺すらない場合とのトンネルの様子の違いが顕著になるような τ_c を突き止めることでトンネル時間を決定しよう、という試みは、高木によって示されたように障壁の揺すり方及びトンネルの様子として何をとるか（今の例では $P_\pm$ か $\Delta E_T/\Delta E$ か）によって異なった答えを出すので、トンネル時間の問題に決着を付けることはできない。

（３）障壁の部分だけに一様な磁場を与え、スピンをもった粒子を入射させる。スピンは磁場によって回転し、磁場が弱ければ、その回転角は粒子が磁場の中、従って障壁の中にいた時間に比例するはずである。従って透過してきた粒子のスピンの回転角からトンネル時間を読みとることができるだろう。

[4] このモデルは厳密に解くことができる。



$$\longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\hbar}{V\sqrt{V/E-1}} = -\hbar\frac{\partial\phi}{\partial V} \\ \frac{d}{\sqrt{2(E-V)/m}} = -\hbar\frac{\partial \ln |T|}{\partial V} \end{cases}$$

図 2: スピンの回転からトンネル時間を求める。

図のように $-y$ 方向のスピンを持った粒子が x 軸に沿って障壁に入射したとしよう。障壁の中にのみ z 方向の弱磁場がある。Rybachenko [14] は、磁場によるスピンの xy 面内での回転角からトンネル時間を求めた。その結果は

$$-\hbar\frac{\partial\phi}{\partial V} \tag{5}$$

と書ける。これに対し Büttiker [15] はスピンは xy 面内で回転するだけではないことを指摘した。$-y$ 方向のスピンは、$+z$ 方向と $-z$ 方向のスピンの重ね合わせで書ける。ゼーマンエネルギーのため $+z$ 成分と $-z$ 成分が見る実質的な障壁の高さは異なり、$+z$ 成分の透過確率の方が大きくなる。その結果、障壁を透過したスピンは $+z$ 成分のほうをより多く含み、xy 面内から浮き上がっている。Büttiker はこの浮き上がりを yz 面内での回転のように考え、それに対して xy 面内での回転角からトンネル時間を割り出したのと同じ手続きを適用して、もう一つのトンネル時間を求めた。不透明な障壁の場合、結果は

$$-\hbar\frac{\partial \ln |T|}{\partial V} \tag{6}$$

と表せる。(5) と (6) は明らかに異なる。このように障壁中に閉じ込めた磁場によるスピンの回転を用いても、スピンのどの成分に着目するかで異なった答えが得られるので、トンネル時間の問題に決着を付けることはできない。

1.3 どう考えるべきか

このように、アイデア次第でいろいろなトンネル時間が得られ、一体何が本当の答えなのか、あるいは答えがないのか、このままではわからない。しかし以上の試みから読みとるべきことは「トンネル時間には、透過振幅 T の絶対値のみならず、位相も関係しているようである」ということではなかろうか。そもそもトンネル効果は複素数の透過振幅 T で記述されるのであるから、トンネル時間も、もしあるならば、T で決まるはずである[5]。トンネル確率には T の位相は関係なかった（粒子の経路を分けて干渉実験をしない限り）。しかしトンネル時間の問題はトンネル確率よりも詳細な情

[5] 波束で考える場合には、T と k（波数）空間での波動関数で決まるはずである。

報を求めているのであるから、トンネル時間がもしあるのならば、それにはTの絶対値のみならず位相も関係しているのが自然なように思える。

もう一つ考えるべきことがある。上の試みではトンネル時間の問題に対して一つの数値で答えようとしていることである（その結果様々な答えが出てきた)。しかし量子力学で考えているのだから、「トンネル時間の確率」を問題にする方が自然なのではないだろうか？もしトンネル時間τの確率密度$P(\tau)$なるものが定義できるのならば、それは

$$\int_0^\infty d\tau P(\tau) = \text{透過確率} \tag{7}$$

を満たすはずである。このような$P(\tau)$は透過確率よりも詳細な情報を含むはずである。

このような考えのもとで、著者はトンネル時間の確率の定義可能性を問題としたい。つまりトンネル時間の問題を「トンネル時間の確率を考えることはできるか？」と設定する。さて、純量子力学的な確率は振幅から作られるべきである。そこで、問題設定は二段構えとなる。

（1）トンネル時間の振幅は何か？
（2）トンネル時間の振幅から、矛盾なく確率を構成することができるか？

「矛盾無く」というのは「振幅が満たすべき重ね合わせの原理と確率が満たすべき公理とが衝突しないように」という意味である。

2 実時間ファインマン経路積分によるアプローチ

2.1 大まかな流れと結果

上のように設定されたトンネル時間の問題に対し、ファインマン経路積分を使ったアプローチを簡単に紹介する。2.2節において、ファインマン経路積分を用いてトンネル時間の振幅(22)を定義する。2.4節では、「振幅から確率をどう作るか」という観点から、トンネル時間の確率的記述がどの程度可能かということを検討する。ここで量子力学的粒子に対する二重スリットの実験との対比が役に立つ。異なるスリットを通った波どうしの干渉と異なるトンネル時間を持った振幅どうしの干渉が対応する。従って、異なるトンネル時間の振幅どうしの干渉が無いことがトンネル時間の確率密度が定義できるための条件となる。トンネル時間の干渉を表すものとして「非干渉汎関数」(27)が導入される。まず2.4.1節において、少なくとも「トンネル時間の拡がりの幅」については語ることができる、という主張をする（主張1)。その拡がりの幅を見積もるための重要な関数Fが非干渉汎関数を用いて構成される[(30)]。2.4.2節では「トンネル時間の確率密度」が定義できるのはどのようなときか、という問いに対して、「非干渉条件」(43)が成り立つときには確率密度が定義できる、という主張を行う（主張2)。非干渉条件は恐らく成立することはないと思われるが、それは以後の議論の出発点と

なるものなので、2.5節では非干渉条件及び主張2の意味、意義について解説を加える。2.6節では、本論のアプローチといわゆる“consistent histories approach to quantum mechanics”との関係を明らかにする。3節では、障壁の高さが一定でない場合のトンネルを考えると、トンネル時間の拡がりの幅が障壁の高さの揺らぎによって変化する可能性を指摘する。これはトンネル時間の制御という観点から非常に重要である。さらに、障壁の高さの揺らぎの大きさ ΔV の逆数 $\hbar/\Delta V$ よりも十分大きな時間スケールでトンネル時間を考えるならば、非干渉条件が近似的に成立することを指摘し、その場合には「粗視化されたトンネル時間に対する近似的確率」の概念を導入できる可能性があることを主張する（主張3）。4節では、薄くて高い障壁の場合に今まで述べてきたことを適用し、障壁の高さの揺らぎが大きくなるにつれ、トンネル時間の拡がりの幅が小さくなることを数値計算により示す。

本論では、理論の展開が大部分を占め、数値計算による具体的な結果は（研究会の時点での）一例だけにとどめた。現在、より多くの場合について数値的に調べており、本論で展開された理論は興味深い結果を出しつつある。

なお、本論では虚時間の経路積分は使わない。実時間であるべきトンネル時間を議論するのに虚時間形式は不向きである（少なくとも直接的ではない）。「トンネル効果と経路積分」といえば虚時間形式がすぐに思い浮かぶが、トンネル時間の問題では実時間の経路積分を使うのが自然であると思う。

2.2 トンネル時間の振幅

本節の内容の基本的な部分は Sokolovksi [16–18] による。

$0 < x < d$ に高さ V の矩形障壁を考える。図のように障壁を通過するファインマン経路 $x(t)$ を一本考える。

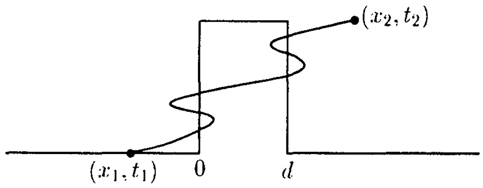


図 3: 障壁を通過するファインマン経路。

$0 < x < d$ で値1を取りそれ以外では0である関数 $\Theta_{0,d}(x)$ を考えよう。$x(t)$ が障壁中で過ごす時間 $\tau_{0,d}[x(\cdot)]$ は

$$\tau_{0,d}[x(\cdot)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \Theta_{0,d}(x(t)) \tag{8}$$

と表すことができる。点1= (x_1, t_1) と点2= (x_2, t_2) を結ぶ全ての経路に対してこのように障壁中で過ごす時間を考えることができる ($x_1 < 0 < d < x_2,\ t_1 < t_2$)。過ごす時間の値によって全経路を分類し、過ごす時間が τ である経路のクラスを $\mathcal{C}_\tau$ と表そう。$\mathcal{C}_\tau$ の経路全てを $e^{iS/\hbar}$ (S は作用) の重みで足し上げたものを $K(2;1|\tau)$ とすると、

$$K(2;1|\tau) \equiv \int \mathcal{D}x(\cdot)\, \delta(\tau_{0,d}[x(\cdot)] - \tau) e^{iS[x(\cdot)]/\hbar} \tag{9}$$

当然次の関係が成り立つ

$$\int_0^{t_2-t_1} d\tau\, K(2;1|\tau) = K(2;1) \tag{10}$$

$K(2;1) \equiv K(x_2, t_2; x_1, t_1)$ は点1と点2を結ぶプロパゲータである。$0 < \tau_{0,d}[x(\cdot)] < t_2 - t_1$ だから、$\tau < 0$ または $\tau > t_2 - t_1$ に対しては $K(2;1|\tau) = 0$ となる。従って、(10) の積分範囲は $-\infty < \tau < \infty$ に広げることができる。さて、デルタ関数のフーリエ表示

$$\delta(\tau_{0,d}[x(\cdot)] - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV'}{2\pi\hbar}\, e^{-iV'(\tau_{0,d}[x(\cdot)]-\tau)/\hbar} \tag{11}$$

を (9) に代入する。その結果現れる $e^{-iV'\tau_{0,d}[x(\cdot)]}e^{iS/\hbar}$ ($= A$ とおく) という項に着目しよう。まず、高さ V の矩形障壁は $V(x) = V\Theta_{0,d}(x)$ と書けるので、$-V'\tau_{0,d}[x(\cdot)] = -\int_{t_1}^{t_2} dtV'(x(t))$ と表せる[6]。このことと、S の中のポテンシャルの項が $-\int_{t_1}^{t_2} dtV(x(t))$ であるということから、$A = e^{iS_{V+V'}/\hbar}$ であることがわかる。ここで障壁の高さが V の時の S を S_V と記した。こうして

$$K_V(2;1|\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV'}{2\pi\hbar} e^{iV'\tau/\hbar} K_{V+V'}(2;1) \tag{12}$$

が得られる。障壁の高さが V であるときのプロパゲータを $K_V(2;1)$ と記した。式 (12) が以後の議論の出発点となる。障壁中で経路の過ごす時間を指定すると (左辺)、障壁の高さが全く不定になっている (右辺) ことに注意されたい。障壁中で過ごす時間と障壁の高さとは一種の不確定性関係にある。式 (12) (と同じ内容のもの) は最初に Fertig [19, 20] によって Path Decomposition Expansion [21, 22] [7] という経路積分のテクニックを使って導かれた。上では Sokolovski [16–18] の方法に従った。

次に初期条件を考慮する。初期時刻 $t_1 = 0$ での粒子の波動関数を $\Psi(x, 0)$ とする。$\Psi(x, 0)$ は $X < 0$ のみで 0 でない値を持ちうる。波動関数の時間発展は

$$\Psi_V(x,t) = \int dx_1\, K_V(x, t; x_1, 0)\Psi(x_1, 0) \tag{13}$$

と書ける (実質的な積分範囲は $-\infty < x_1 < 0$ である)。高さ V の矩形障壁のもとでの波動関数を $\Psi_V(x, t)$ と記した。プロパゲータには全経路が寄与しているので、$\Psi_V(x, t)$

[6] V' の $'$ は微分を表しているのではない。

[7] 経路がある点に初めて到達する時刻 (first passage time) を用いて経路分類を行う方法。

は「全経路による時間発展の結果」と読める。同じ精神で「クラス$\mathcal{C}_\tau$の経路による時間発展の結果」と読める$\Psi_V(x,t|\tau)$を次式で定義しよう。

$$\Psi_V(x,t|\tau) \equiv \int dx_1\, K_V(x,t;x_1,0|\tau)\Psi(x_1,0) \tag{14}$$

散乱が終了し透過波束と反射波束が十分明確に定義できる状況を前提とするので、終時刻tは初期時刻より十分あとに取る。さらに透過のみに興味を絞っているので、$\Psi_V(x,t)$と$\Psi_V(x,t|\tau)$は$x > d$のみで考える。形式的には(13)と(14)の右辺に階段関数$\Theta(x-d)$を掛けて考える。従って以後$\Psi_V(x,t)$は全波動関数ではなく透過波束を表す。式(14)は「透過波束のうち障壁中でτだけ過ごした成分」を定義していると解釈できる。式(10)を用いると、

$$\int d\tau\, \Psi_V(x,t|\tau) = \Psi_V(x,t) \tag{15}$$

が成立することがわかる。τの積分範囲は先に述べた理由で$-\infty < \tau < \infty$とできる。このように透過波束は「障壁中で過ごす時間τ」によって分解することができる。ここで(15)と(7)を比べていただきたい。我々が知りたいのは透過確率がτによって分解できるか、ということである。これを調べる準備として$\Psi_V(x,t|\tau)$を扱いやすい形に書いておく。

式(14)の右辺に(12)を代入すると、

$$\Psi_V(x,t|\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV'}{2\pi\hbar} e^{iV'\tau/\hbar}\Psi_{V+V'}(x,t) \tag{16}$$

を得る。あとで使う大事な性質

$$\Psi_{V_2}(x,t|\tau) = e^{-i(V_2-V_1)\tau/\hbar}\Psi_{V_1}(x,t|\tau) \tag{17}$$

を指摘しておく。式(16)を使うためには、$\Psi_V(x,t)$をVの全ての値に対して知らねばならない。$\Psi_V(x,t)$は(13)によってプロパゲータと初期条件で決まる。まず、プロパゲータは

$$K_V(x,t;x_1,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} T(V,k) e^{ik(x-x_1)-i\omega t} \quad (\omega \equiv \frac{\hbar k^2}{2m}) \tag{18}$$

と書ける。自由粒子の場合には右辺で$T=1$としたものがプロパゲータを与えるのは周知の通りである。障壁のある場合には、透過によって平面波に重みTが掛かることを考えれば上式は直感的に納得できよう[8]。$T(V,k)$はもともと$k>0$に対してのみ定義されているが、(18)ではその定義を$k<0$の場合にもそのまま使えばよい。次に初期条件を平面波の重ね合わせ

$$\Psi(x_1,0) = \int_{\Delta k} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, \psi(k) e^{ikx_1} \tag{19}$$

$$\int_{\Delta k} dk\, |\psi(k)|^2 = 1 \tag{20}$$

[8] ちゃんとやるには、障壁がある場合の完全直交系を求め（その半分が(1)である）、それからプロパゲータを構成すればよい。

で表す。右方向に動く波束を想定しているので、積分に寄与する k は $k>0$ でなければならず、かつ、入射エネルギーが障壁の高さを超えてはトンネルにならないので、$k<k_V\equiv\sqrt{2mV}/\hbar$ でなければならない。このような k の範囲を Δk と書いた[9]。(18) と (19) を (13) に代入すると x_1 積分が実行でき、透過波束は

$$\Psi_V(x,t)=\int_{\Delta k}\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\psi(k)T(V,k)e^{i(kx-\omega t)} \tag{21}$$

と表されることがわかる。従って

$$\Psi_V(x,t|\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dV'}{2\pi\hbar}e^{iV'\tau/\hbar}\int_{\Delta k}\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\psi(k)T(V+V',k)e^{i(kx-\omega t)} \tag{22}$$

このように、$\Psi_V(x,t|\tau)$ を求めるためには初期条件を表す ψ および透過振幅 T がわかればよい。Fertig 流に言えば、$\Psi_V(x,t|\tau)$ は「トンネル時間の振幅分布」である[10]。

2.3 シュレディンガー方程式が全てか？

以後の議論にとっては $\Psi_V(x,t|\tau)$ が出発点である。上の結果 (22) を見ると、それを求めるためには経路積分はもはや必要ないことがわかる。しかし求めた $\Psi_V(x,t|\tau)$ を解釈するところで、経路積分に戻らなければならない。つまり、τ が「障壁中で過ごす時間」という意味を持っていることは、経路積分の文脈で理解できることなのである。次のように言うこともできる。$\Psi_V(x,t|\tau)$ は波動関数 $\Psi_V(x,t)$ が全ての V に対してわかれば計算できる。だから $\Psi_V(x,t|\tau)$ は波動関数を越える情報を持っているわけでなはい。しかし、シュレディンガー方程式だけを用いて $\Psi_V(x,t|\tau)$ の τ に意味付けを行うことはできないのではないだろうか。「波動関数が全て」だとしても「シュレディンガー方程式が全てではない（ファインマン経路積分の方が広い）」と主張したくなる。どうだろうか？

2.4 振幅分布から確率（分布）へ

2.4.1 主張 1：トンネル時間の幅

透過確率 P_V の定義式に (15) を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} P_V &\equiv \lim_{t\to\infty}\int_d^{\infty}dx\,|\Psi_V(x,t)|^2 && (23)\\ &= \lim_{t\to\infty}\int_d^{\infty}dx\left|\int d\tau\,\Psi_V(x,t|\tau)\right|^2 && (24)\end{aligned}$$

[9] 「トンネル時間」を問題にする上では $k<k_V$ の制限は必要であるが、この制限をはずすことにより一般的な「滞在時間」（障壁の高さよりも高エネルギーの成分も含む一般的な波束で表される粒子がある空間領域を通過するときに、粒子がそこに滞在する時間）を議論できる。本論の定式化はその場合にもそのまま適用できる。トンネル時間の場合との違いは Δk の大きさだけである。

[10] 正確には Fertig [19,20] は $K_V(2;1|\tau)/T(V)$ を traversal time の amplitude distribution と呼んだ。

表式(24)は、障壁中でさまざまな時間を過ごす経路が透過確率に寄与していることを表している。しかし主要な寄与はある限られた範囲$(\tau_<, \tau_>)$から来ていると考えられよう（$0 < \tau_<,\ \tau_> < t$）。すなわち

$$\lim_{t\to\infty}\int_d^\infty dx\,\left|\int_{\tau_<}^{\tau_>} d\tau\,\Psi_V(x,t|\tau)\right|^2 \approx P_V \tag{25}$$

このような$\tau_<$と$\tau_>$があるときには、それを次のように解釈することを提案する。

主張1：トンネル時間は実質上$(\tau_<, \tau_>)$の範囲に拡がっている。

これを理解するために、量子力学的な粒子に対する二重スリットの実験を思い出そう。

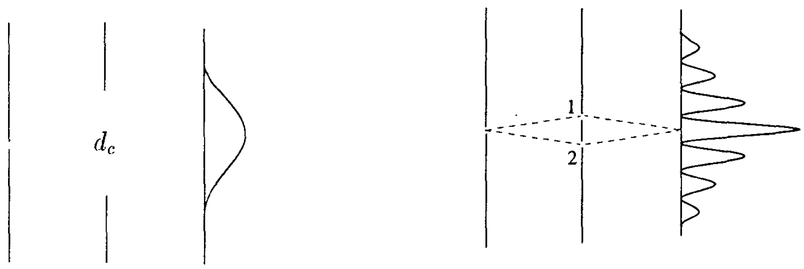


図 4: 粒子は幅d_cの中を通ってきた。干渉のためそれより詳しいことは言えない。

よく知られているように、スクリーン上の干渉パターンを壊すことなしに粒子がどちらのスリットを通ったかをいうことはできない。さて、スリットが二つではなく一つだったらどうなるか？このときスリットの幅dを広げて行くにつれスクリーン上の模様も変わって行くが、もうそれ以上広げても模様は実質的に変化しなくなるような幅d_cがある。このとき「粒子は幅d_cのなかを通ってきた」と言うことができる。トンネル時間の場合にこれに対応するのが主張1である。ここで、「粒子は幅d_cの中を通ってきた」を「粒子の軌道がその幅の中のどこを通過するかは確率的に決まっている」の意味に受け取ってはならない。そのような確率的な経路は無い。「では幅d_cの中を通ってきたと言うことに何の意味があるのか？」と思われよう。「粒子は波として幅d_cの中を通って来た」というのが全てであるが、「幅d_c以外の部分を障害物で覆ってしまってもスクリーン上の模様に変化は生じないという意味で粒子は幅d_cの中を通って来た」と言うのが納得しやすいかもしれない。同様に主張1を「粒子が障壁中に滞在する時間は$(\tau_<, \tau_>)$の範囲で確率的に決まっている」と受け取ってはならない。「粒子が障壁中に滞在する時間は確率的に決まっているわけではないが[11]、$\tau_<$よりも短い時間や$\tau_>$よりも長い時間滞在することはないという意味で滞在時間は$(\tau_<, \tau_>)$の範囲にある」と受け取っていただきたい。これが現実にどのような現象となって観測され

[11] 後で述べる弱い非干渉条件(43)が成立しないことが証明できて初めて「確率的に決まっているわけではない」と断言できる。

るかは本論の議論だけでははっきりせず、恐らく、粒子が障壁中で他の自由度と相互作用する状況を考えることにより明らかになるであろう。少なくとも、主張 1 のもとになった (25) の意味ははっきりしている。障壁中で過ごす時間が $(\tau_<, \tau_>)$ の範囲にあるファインマン経路が透過確率に主要な寄与をする、ということである[12] 。

この節の残りでは、今後重要な役割を果たすことになる量を導入しながら、$\tau_<$ と $\tau_>$ を見積もる方法を整備する。透過確率 (24) は

$$P_V = \int d\tau \int d\tau' D_V[\tau;\tau'] \tag{26}$$

と書ける。ここで

$$D_V[\tau;\tau'] \equiv \lim_{t\to\infty} \int_d^\infty dx\, \Psi_V^*(x,t|\tau)\Psi_V(x,t|\tau') \tag{27}$$

$D_V[\tau;\tau']$ あるいはその実部は「クラス $\mathcal{C}_\tau$ で表される経路の集まりとクラス $\mathcal{C}_{\tau'}$ で表される経路の集まりとの間の干渉」[13] を表すと考えられる。$D_V[\tau;\tau']$ を非干渉汎関数と呼ぶ。異なる τ の間の干渉の有無は τ の確率密度の定義可能性を左右するが、この点は次節で議論する。非干渉汎関数を用いて (25) を書くと、

$$\int_{\tau_<}^{\tau_>} d\tau \int_{\tau_<}^{\tau_>} d\tau'\, D[\tau;\tau'] \approx P_V \tag{28}$$

となる。積分領域は下図左のような正方領域 $ABCD$ である。

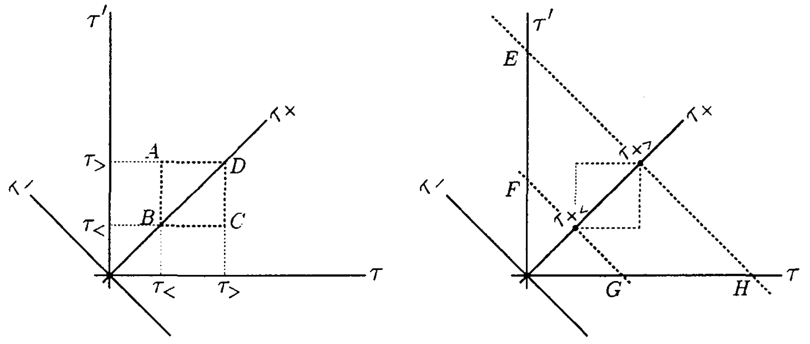


図 5: トンネル時間の幅を見積もる。

[12] 「(25) が物理的に何を意味するのか？」という問いは「$|\Psi(x,t)|^2$ が物理的に何を意味するのか？」というのと同じ性格の問いである。理論だけでは $|\Psi(x,t)|^2$ の意味を一意的に決定することができないのと同様に、(25) の意味も最終的には何らかの実験との対応で明らかにされるべきことである。しかし、「障壁中で過ごす時間が $(\tau_<, \tau_>)$ の範囲にあるファインマン経路が透過確率に主要な寄与をする」という数学的事実を頼りにして、「$(\tau_<, \tau_>)$ の範囲に拡がったトンネル時間」という何らかの物理的なトンネル時間の存在を期待するのは自然ではなかろうか。

[13] これを簡単に「τ と τ' の間の干渉」、「異なる τ を持つ経路の間の干渉」などと言うことにする。正確な意味を踏まえた上であれば、「粒子が障壁中で τ だけ過ごすという"事象" と τ' だけ過ごすという"事象"との間の干渉」と言ってもよかろう。

$\tau\tau'$ 面において、正方領域以外の部分は積分にはほとんど寄与しないので（それが $\tau_<$ と $\tau_>$ の定義）、領域を広げて台形領域 $EFGH$ で積分しても結果はほとんど変わらない。逆にそれ以外の領域は積分に寄与しないというような台形領域が最初にわかれば、それから $\tau_<$ と $\tau_>$ が見積もれる。そこで、変数

$$\tau_- \equiv \tau' - \tau, \quad \tau_+ \equiv (\tau' + \tau)/2 \tag{29}$$

を導入し、$D_V[\tau;\tau']$ を τ_- と τ_+ の関数として表したものを $D_V(\tau_-,\tau_+)$ としよう。以後非常に重要な役割を果たす関数 F を定義する。

$$F_V(\tau_+) \equiv \int d\tau_-\, D_V(\tau_-,\tau_+) \tag{30}$$

台形領域 $EFGH$ は

$$\int_{\tau_{+_1}}^{\tau_{+_2}} d\tau_+\, F_V(\tau_+) \approx P_V \text{ for } {}^\forall\tau_{+_1} < \tau_{+<} \text{ and } {}^\forall\tau_{+_2} > \tau_{+>} \tag{31}$$

となるような $\tau_{+<}$ と $\tau_{+>}$ によって決まる。さらに、そもそも $\tau_<$ や $\tau_>$ はおおまかにしか決まらない量なので、$\tau_{+<}$ と $\tau_{+>}$ をそのまま $\tau_<$ と $\tau_>$ だと考えてもよい。

$F_V(\tau_+)$ を扱いやすい形に書いておこう[14]。(22) を (27) に代入すると次式を得る（ここでだけ障壁の高さを V_0 とした）。

$$\begin{aligned} D_{V_0}[\tau;\tau'] = \lim_{t\to\infty} \int\!\!\int \frac{dV}{2\pi\hbar}\frac{dV'}{2\pi\hbar} e^{-iV\tau/\hbar} e^{iV'\tau'/\hbar} \\ \times \int_d^\infty dx \left\{ \left[\int_{\Delta k} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \psi(k) T(V_0+V,k) e^{ikx - i\omega(k)t} \right]^* \right. \\ \left. \times \left[\int_{\Delta k} \frac{dk'}{\sqrt{2\pi}} \psi(k') T(V_0+V',k') e^{ik'x - i\omega(k')t} \right] \right\} \end{aligned} \tag{32}$$

$t \to \infty$ において [ ] の中はある高さの障壁を抜けてきた透過波束を表す。従って x 積分の下限は $-\infty$ としてよい。すると x 積分は $2\pi\delta(k-k')$ を与え、その結果 (32) の二重 k 積分は単一 k 積分におちる。最終的に次式を得る。

$$D_V[\tau;\tau'] = \int_{\Delta k} dk\, |\psi(k)|^2 D_{V,k}[\tau;\tau'] \tag{33}$$

$$D_{V,k}[\tau;\tau'] \equiv e^{-iV(\tau'-\tau)/\hbar} \mathcal{T}_k^*(\tau)\mathcal{T}_k(\tau') \tag{34}$$

$$\mathcal{T}_k(\tau) \equiv \int \frac{dV}{2\pi\hbar} e^{iV\tau/\hbar} T(V,k) \tag{35}$$

(33) は一般的な初期条件（波束で表される粒子）のもとでの非干渉汎関数である。初期条件が単色的な場合の非干渉汎関数は、(33) において形式的に $|\psi(k)|^2 = \delta(k-k_0)$

[14] 1.3 節で述べたように、トンネル時間に関係することは透過振幅と初期条件できまるはずであるから、$D_V[\tau;\tau']$ や $F_V(\tau_+)$ を透過振幅と初期条件で表すという方針で以下の式変形を行う。

とおけばよい（波数を k_0 とした）。こうして、入射粒子が一定の波数 k を持っているときの非干渉汎関数は $D_{V,k}[\tau;\tau']$ であることがわかる。$D_{V,k}[\tau;\tau']$ を $\tau_\pm$ で表したものを $D_{V,k}(\tau_-,\tau_+)$ と記すと、

$$D_{V,k}(\tau_-,\tau_+)=\int\frac{dV_+}{2\pi\hbar}e^{i(V_+-V)\tau_-/\hbar}\int\frac{dV_-}{2\pi\hbar}e^{iV_-\tau_+/\hbar}T^*(V_+-V_-/2,k)T(V_++V_-/2,k) \quad (36)$$

従って (30)、(33)、(36) により、

$$F_V(\tau_+)=\int_{\Delta k}dk\ |\psi(k)|^2\,F_{V,k}(\tau_+) \quad (37)$$

$$F_{V,k}(\tau_+)\equiv\int d\tau_-\ D_{V,k}(\tau_-,\tau_+) \quad (38)$$

$$=\int\frac{dV_-}{2\pi\hbar}e^{iV_-\tau_+/\hbar}T^*(V-V_-/2,k)T(V+V_-/2,k) \quad (39)$$

を得る。(38) で τ_- 積分の範囲を $(-\infty,\infty)$ とした。これが許される理由は、もともと τ と τ' の範囲を $(-\infty,\infty)$ に広げても構わなかったからである（2.2 節参照）。初期条件が単色的な場合には、その波数を k とすると (37) より $F_V(\tau_+)=F_{V,k}(\tau_+)$ となる。面白いことに、(39) はウイグナーの位相空間分布関数[15] に似た形をしている。F_V と $F_{V,k}$ は実数であり、次の重要な性質を持つ。

$$\int_0^\infty d\tau_+\ F_{V,k}(\tau_+)=P_{V,k}\quad (P_{V,k}\equiv|T(V,k)|^2) \quad (40)$$

$$\int_0^\infty d\tau_+\ F_V(\tau_+)=P_V \quad (41)$$

τ_+ 積分の範囲も $(-\infty,\infty)$ に広げられることに気が付けば、(40) は (39) より直ちに導かれる。続いて (41) が得られる[16]。念のために言うと、

$$P_V=\int_{\Delta k}dk\ |\psi(k)|^2\,|T(V,k)|^2 \quad (42)$$

が成立する。これを示すには (21) を (23) に代入して $t\to\infty$ の極限を取ればよいだけである。その際に (32) の下に述べたのと同様な理由で x 積分の下限を $-\infty$ としてよいことに注意する。

本節のまとめ：初期条件と透過振幅が与えられると、(37) と (39) により $F_V(\tau_+)$ が定まる。$F_V(\tau_+)$ の拡がりの幅はトンネル時間の拡がりの幅を与える（主張 1）。特に、$F_{V,k}(\tau_+)$ の拡がりの幅は波数 k の単色的初期条件のもとでのトンネル時間の拡がりの幅を与える。

---

[15] 量子力学では、例えば位置と運動量の同時分布関数は考えられない。しかし正定値でなくてもよいのであれば、「同時分布関数もどき」を作ることができる。ウイグナーの位相空間分布関数はそのようなもので、それを使うと物理量の平均値を求める操作が、古典的な位相空間での平均操作と同じ形になって便利である。さらにそれは古典－量子対応を考察する手がかりを与える点で重要である。

[16] もともと (26) が成り立っていたのだから、(41) は当然である。

2.4.2 主張2：トンネル時間の確率密度が定義できるための条件

前節で導いた(40)や(41)は(7)の形をしている。我々は知らないうちに主張1を飛び越えて、トンネル時間の確率密度に到達していたのだろうか?しかし $F_{V,k}(\tau_+)$ や $F_V(\tau_+)$ が確率密度であるためにはそれらは正定値でなければならない。(37)や(38)はそれらが実数であることは保証しているが、正定値であることまでは保証していない。ここで二重スリットの実験に戻ってみよう。二重スリットの実験は、粒子がどこを通ってきたかに関して幅 d_c 以上のことを知ろうとしたときに何が起こるのかを示すものだと言える。同様に、トンネル時間の場合に主張1以上のこと（トンネル時間の確率密度の存在など）が言えるかどうかは異なる τ の間の「干渉」の有無にかかっていると察しがつく。その干渉を定量化したものが前節で導入した非干渉汎関数 $D_V[\tau;\tau']$ である。もし $D_V[\tau;\tau']$（少なくともその実部）が $\delta(\tau-\tau')$ に比例するならば、それは異なる τ を持つ経路の間の干渉が無いことを意味し、従って主張1よりも詳細なことが言えると期待される。実際、

$$\mathrm{Re}\, D_V[\tau;\tau'] = \delta(\tau-\tau')P_V(\tau) \tag{43}$$

という形の式が成り立つと仮定してみよう。すると(26)は

$$\int d\tau P_V(\tau) = P_V \tag{44}$$

となり、これはトンネル時間の確率密度が満たすべき式(7)の形をしている。実際、(43)が成り立つならば、比例係数の $P_V(\tau)$ は正定値である。これを示すには、(43)の両辺を τ と τ' に関してともに $(\tau_0-\Delta\tau/2, \tau_0+\Delta\tau/2)$ の範囲で積分してみればよい（τ_0、$\Delta\tau$ は任意)。その結果

$$P_V(\tau) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Delta\tau}\int_d^\infty dx \left|\int_{\tau-\Delta\tau/2}^{\tau+\Delta\tau/2} d\tau'\, \Psi_V(x,t|\tau')\right|^2 \tag{45}$$

となり確かに正である[17]。以上の考察をもとに次の主張を行う。

主張2：$\mathrm{Re}\, D_V[\tau;\tau']$ が $\delta(\tau-\tau')$ に比例するならば、トンネル時間の確率密度が定義でき、その確率密度は比例計数 $P_V(\tau)$ で与えられる。

主張2と主張1は矛盾しない。条件(43)が成り立つとき[18]、その両辺を τ と τ' に関してともに $(\tau_<, \tau_>)$ の範囲で積分すると、

$$\lim_{t\to\infty}\int_d^\infty dx \left|\int_{\tau_<}^{\tau_>} d\tau\, \Psi_V(x,t|\tau)\right|^2 = \int_{\tau_<}^{\tau_>} d\tau\, P_V(\tau) \tag{46}$$

従って

$$\int_{\tau_<}^{\tau_>} d\tau\, P_V(\tau) \approx P_V \tag{47}$$

[17] 一見右辺の x 積分の結果は $O((\Delta\tau)^2)$ であるように思えるが、(43)のおかげで $O(\Delta\tau)$ である。
[18] 「$\mathrm{Re}\, D_V[\tau;\tau'] \propto \delta(\tau-\tau')$ が成立するとき」と言うべきであるが、以後簡単に「(43)が成立するとき」と言うことにする。

と (25) は同じことになる。条件 (43) が成り立つときには、主張1は「粒子が障壁中に滞在する時間は $(\tau_<, \tau_>)$ の範囲で確率的に決まっている」というより強い意味を持つようになるのである。

なお、(43) は一般的な初期条件（入射粒子が波束で表される場合）のもとで導いた。入射粒子が単色的（波数 k）なときには、$D_V[\tau;\tau'] = D_{V,k}[\tau;\tau']$ なので [(33) を見よ]、比例係数を新たに $P_{V,k}(\tau)$ とおいて (43) は

$$\mathrm{Re}D_{V,k}[\tau;\tau'] = \delta(\tau-\tau')P_{V,k}(\tau) \tag{48}$$

となる[19]。このように本論のアプローチでは、初期条件が波束である場合も単色的である場合も統一的に扱うことができる。

1.3節においてトンネル時間の問題を二段構えで設定したことを思い出そう。最初の「トンネル時間の振幅は何か？」に対しては、「それは2.2節で構成した $\Psi_V(x,t|\tau)$ である」が回答である。二番目の「トンネル時間の振幅から、矛盾なく確率を構成することができるか？」に対しては、本節で基本的な回答が与えられた。それは「条件 (43) が成立するときにはトンネル時間の確率密度が矛盾なく定義できる」というものである。(43) は「振幅に対する重ねあわせの原理」と「確率の公理（特に和則）」が互いに矛盾しないための条件であり、従って「波動性と粒子性の両立条件」と考えることができる。理由は次の通り。トンネル時間の振幅は (15) という重ね合わせの式（振幅に対する“和則”）を満たしており、これは波動性の反映である。一方でトンネル時間の確率密度は (44) という和則を満たさねばならない。この和則は粒子的な性質であり、上で見たように (43) が成立するときにはその和則は成立する。(43) が成立するということは、波動性と矛盾することなく粒子的記述が可能だということである。(43) が成立しないときには、「トンネル時間は干渉的選択肢である」ということになる。二重スリットの実験において、「粒子が上のスリットを通った」ということと「下のスリットを通った」ということが干渉的選択肢であることと同様なことである。

では条件 (43) が成立することはあるだろうか？まず、より強い条件

$$D_V[\tau;\tau'] = \delta(\tau-\tau')P_V(\tau) \tag{49}$$

が成立しないことは簡単に示すことができる [23]。(17) により

$$D_{V_2}[\tau;\tau'] = e^{i(V_2-V_1)(\tau-\tau')/\hbar}D_{V_1}[\tau;\tau'] \tag{50}$$

が成立することに注意する。従ってもし $V = V_1$ に対して

$$D_V[\tau;\tau'] = \delta(\tau-\tau')P_V(\tau) \tag{51}$$

が成立するならば、$V = V_2$ に対しても成立し、$P_{V_2}(\tau) = P_{V_1}(\tau)$ となる。この両辺を τ で積分すると $P_{V_2} = P_{V_1}$、すなわち「透過確率は障壁の高さに依らない」となって、明

[19] $D_{V,k}[\tau;\tau']$（あるいはその実部）は「波数 k の入射粒子が高さ V の障壁を透過するという状況下での、異なる τ の間の干渉」を表す。

らかに正しくない。従って (51) はどのような値の V に対しても成立することはない。問題はより弱い条件 (43) が成立するかどうかである。異なる τ の間の干渉が厳密に 0 になることはありそうもないから弱い条件は成立しないだろう、というのが著者の考えである。弱い条件の不成立が証明されれば $P_V(\tau)$ の定義可能性は完全に否定される。しかしこうした否定的な結論は、それ自体としては価値のあるものだが、あまり面白くない。そこで、本論では弱い条件の不成立の証明に努力を傾けるのではなく、別の方向に議論を進める。各 τ に対して確率を考える（すなわち確率密度を考える）ことはできなくとも、τ を粗視化することで近似的な確率[20] を考えることができないか、という方向である。主張1は「トンネル時間が $(\tau_<, \tau_>)$ の範囲にある確率がほぼ1である[21]」ということを言っているので、「粗視化されたトンネル時間に対する近似的確率」の特別な場合と考えることができる。確率密度 $P_V(\tau)$ が定義できなくても、「$(\tau_<, \tau_>)$ を狭めることはできないか？」、「$(\tau_<, \tau_>)$ を分割し、分割された区間に対して近似的に確率を定義することはできないか？」という疑問に肯定的に答えることができれば、意義は大きい。

本節では $P_V(\tau)$ の定義可能性について最終的な詰めを行わなかったので、一見、主張2は「言ってみただけ」のような印象を与えるかも知れない。しかし近似的な確率を考える前提として、「トンネル時間に対して厳密な意味で確率が定義できるのはどういうときか」ということがはっきりしていなければならない。つまり主張2はこれからの議論の土台となるものである。本節だけでは主張2の妥当性や背景が必ずしもはっきりしないと思う読者は、2.5節と2.6節に目を通していただきたい。逆に、主張2に違和感を感じなければ3節に進んでいただいて結構である。

以後、(43) と (49) を「非干渉条件」と呼ぶ。特に区別する必要があるときには、(43) を「弱い非干渉条件」、(49) を「中位の非干渉条件」と呼ぶ。これらの呼び方の由来については2.6節で触れる[22]。

2.5 主張2の妥当性

次節で述べるように、主張2は consistent histories approach to quantum mechanics という「量子力学の拡張された枠組み」の中で最も自然に理解できる。しかしそれが何であるか全く知らなくても[23] 以下のように考えれば前節での話の展開が自然なものであると思えるであろう。

トンネルの話とは無関係に、一般的に粒子の波動関数 $\Psi(x,t)$ を考えよう。その平面

---

[20] 近似的というのは「確率の公理（positivity, sum rule, normalization）が近似的に満たされる」という意味。

[21] (25) の両辺を P_V で割って透過粒子のみに母集団を制限して考えれば。

[22] 本論の流れでは (49) を「中位の非干渉条件」と呼ぶ理由は無く、「強い非干渉条件」と呼ぶ方が自然である。

[23] 特に主流である「離散的履歴（次節参照）に対する consistent histories approach」に関した事柄は、いまの話には全くといっていいほど関係がない

波展開を

$$\Psi(x,t) = \int dk\, \Psi(x,t|k) \tag{52}$$

$$\Psi(x,t|k) \equiv \psi(k)\frac{e^{ikx-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \tag{53}$$

と書くことができる。(52) は (15) と同じ形式である。(52) を使いながら、粒子の全確率を次のように変形してみる。

$$\begin{aligned} 1 &= \int dx\, |\Psi(x,t)|^2 \\ &= \int dx\, \left|\int dk\, \Psi(x,t|k)\right|^2 \\ &= \int dk \int dk' D[k;k'] \end{aligned} \tag{54}$$

但し

$$D[k;k'] \equiv \int dx\, \Psi^*(x,t|k)\Psi(x,t|k') \tag{55}$$

(54) の二重 k 積分が (26) の二重 τ 積分に対応する。ここで $\Psi(x,t|k)$ が (53) で与えられることを用いると、

$$D[k;k'] = \delta(k-k')|\psi(k)|^2 \tag{56}$$

となり、全確率の式は

$$1 = \int dk\, |\psi(k)|^2 \tag{57}$$

となる。前節の手続きは、以上のことをそっくり真似たものと見ることができる。$D[k;k']$ が $\delta(k-k')$ に比例するおかげで全確率が波数 k に対する確率密度 $|\psi(k)|^2$ の積分の形に書けたのであるが、一方 $(\mathrm{Re})D[\tau;\tau']$ が $\delta(\tau-\tau')$ に比例するかどうかは調べてみなければわからない。従って (43) は「確率が定義できるための条件」という位置付けになる。条件の意味も明らかである。(56) が成立したのは異なる波数の平面波が直交したからであった。これに対応して、(43) は「異なるトンネル時間に対応する振幅が直交すべし」という「直交条件」である。本論では「非干渉条件」と呼んでいるが（consistent histories approach での呼称 "decoherence condition"を直訳して）、直交条件と呼ぶのがより適切だと思う。本節に限って直交条件と呼ぶことにする。

量子力学ではオブザーバブルに対して確率が定義される。波数がオブザーバブルであることは、波数に関して直交性及び完全性

$$\langle k|k'\rangle = \delta(k-k') \tag{58}$$

$$\int dk\, |k\rangle\langle k| = 1 \tag{59}$$

が成り立つこととして理解される。トンネル時間の場合、直交性はすでに述べたように $(\mathrm{Re})D_V$ がデルタ関数に比例することとして理解される（実際に比例するかどうか

は調べてみないとわからない)。一方、完全性は(15)、あるいはそのもとになった(10)によって表現されていると考えられる。理由は次の通りである。ファインマン経路積分では、位置オブザーバブルの完全性 $\int dx\,|x\rangle\langle x| = 1$ は、経路が x によって分類できるという形で理解される。従って、経路が τ の値で分類できることをもって「τ は完全性を有する」と考えるのは概念の自然な拡張である。この考えに立てば(10)が「τ の完全性」を表しているということになる。(43)が成り立つならば、τ は完全性に加えて直交性も持つことになるので、オブザーバブルとしての性質を持つと言える。このように経路分類(10)と直交条件(43)に基づいてトンネル時間の確率の定義可能性を論じるという方法は、「量子力学ではオブザーバブルに対して確率が定義される」という原則に沿っていると言える。次節で述べる「連続的履歴の場合の consistent histories approach」も、その最も基本的な部分はいま述べたことで尽くされている。

2.6 主張2の背景(consistent histories approach との関係)

主張2はある一般的な方法論をトンネル時間の問題に適用した結果自然に出てくるものである。その枠組みは consistent histories approach to quantum mechanics(CHA と呼ぼう)の名で知られているものである。CHA の創始者は Griffiths [24]、Omnès [25]、Gell-Mann and Hartle [26] である。量子力学は通常、一定時刻でのオブザーバブル(ある時刻での粒子の位置、運動量、スピン …)に対して確率を定義する。時間的に拡がった「事象」(「履歴」と呼ぶ)に対して確率が矛盾無く定義できるのはどういう場合で、また定義できる場合にはその確率はどういう公式で与えられるのか、ということを明らかにしようとするのが CHA である。CHA にはいろいろなバージョンがあり、創始者達の言っている内容の詳細は異なる。どういう種類の履歴を扱うかという点で分類すると、「異なる時刻の射影演算子の積で表される履歴」(離散的履歴)を扱うものと「実時間ファインマン経路で表される履歴」(連続的履歴)を扱うものとに分けられる。前者は創始者全員が扱っている。後者のタイプの履歴は Gell-Mann and Hartle [26] および山田-高木 [27] が導入したが、それに関する研究は前者に比べるとほとんどなされておらず、その分未知の可能性が残されている。以下、特に断らない限り CHA と言えば連続的履歴に対する CHA を指すことにする。

我々が扱ってきた「障壁中で時間 τ だけ過ごす経路」はまさにファインマン経路で表される履歴である。従って CHA を適用して τ に対する確率を議論できる。2.4節では実質的にそれを行ったのである。$\Psi_V(x,t|\tau)$ は CHA における branch wave function [26] をトンネル時間の問題という具体的な問題に対して求めたものに他ならない。$D_V[\tau;\tau']$ は decoherence functional(非干渉汎関数)[26] である。CHA では確率が定義できるための条件を decoherence condition [26](または no-interference condition [27])と呼ぶが、それをトンネル時間の場合に書いたものが(43)に他ならない。また(45)も CHA が与える確率公式をトンネル時間の問題に適用したものである。なお、$K_V(2;1|\tau)$ や $\Psi_V(x,t|\tau)$ を最初に導いた Fertig [19,20] や Sokolovski [17,18] はトンネル時間の問題を CHA の枠

組みで論じたのではない。Fertig は $K_V(2;1|\tau)/T(V)$ を amplitude distribution と呼んだが、それから確率を構成するという方向には向かわなかった。Sokolovski は $\Psi_V(x,t|\tau)$ を traversal time wave function と呼び、それ（あるいはその類似物）から確率を構成する方法として CHA とは異なる方法を複数提唱している [28–31]。ここでは立ち入らない。

CHA をトンネル時間の問題に初めて適用したのは著者 [32] である。そこでは (8) のような「滞在時間」ではなく、(経路が最後に $x=d$ を出た時刻) – (経路が最初に $x=0$ に入った時刻) という「通過時間」を考えた。そして「通過時間型トンネル時間」に対し「直交条件は成立せず、従ってその確率密度は定義できない」という否定的結論を導いた。続いて著者は本論で扱っている「滞在時間型トンネル時間」に対し CHA を初めて適用し [23]、2.4 節で述べたように中位の直交条件が成立しないことを示した。次節からの議論は、CHA で言えば「粗視化された履歴（coarsegrained histories）に対し近似的確率（approximate probabilities）を考える」ということにあたる。

3 トンネル時間の粗視化と近似的確率

主張 2 は非干渉条件が厳密に成立する場合のものである。厳密に成立するとき以外には主張 1 以上のことは何も言えない、というのも厳しすぎると思う。$\tau\tau'$ 平面で考えたとき、(Re)$D_V[\tau;\tau']$ が $\tau-\tau'=0$ の直線の近くでのみ目立った値を取るのであれば、非干渉条件は近似的に成立していると見るのが適当であろう。この考えが実際に生きてくるのが「障壁の高さ V が一定でない場合のトンネリング」においてである。この場合、これまで $D_V[\tau;\tau']$ が果たしてきた役割は $D_V[\tau;\tau']$ を V に関して平均したものによって引き継がれる。以下で明らかになるように、それは $\tau-\tau'=0$ の周囲の限られた範囲で目立った値をとる。

障壁の高さが V_0 の周りに ΔV だけ揺らぐ状況を考える。「揺らぐ」の意味は

「個々の粒子は一定の高さの障壁を通過するが、粒子ごとに障壁の高さは異なりうる」

ということである。このようなモデルはあまり現実的ではないという批判が当然考えられるが、原理的にはこのような状況を考えることは明らかに可能である。本論のようにトンネル時間の概念の確立を目指す段階においては、あまりモデルの現実性にこだわる必要はないと思う。しかし一方で、このモデルは固体中で典型的に起こるタイプのトンネル現象からそれほどかけ離れているわけでもないと思われる。障壁の高さ V が揺らぐということは、入射粒子のエネルギー E が揺らぐということと同様な効果だと考えられるからである。これは特に WKB 近似が有効な場合にそうであろう。その場合には透過確率は V と E にほぼ $V-E$ という形で依存するからである。入射粒子が波束で表される場合には、波束に備わっているエネルギーの不確定性が障壁の高さ

の揺らぎに翻訳されるであろうし、固体中のように入射粒子は単色でも、そのエネルギーが粒子ごとに異なる（Boltzmann分布やFermi分布に従って分布する）場合には、そのエネルギーのばらつきが障壁の高さの揺らぎに翻訳されるであろう。より一般に、トンネル粒子と環境との間でエネルギーのやりとりがある場合も、そのある部分については障壁の高さの変化に翻訳可能かもしれない。本論では、しかし、そのような翻訳を行うわけではなく、上で設定したモデルそのものを調べることに徹する。

一つの粒子の出会う障壁の高さが V である確率を $G(V, V_0, \Delta V)$ とする。このとき透過確率 P は

$$P = \langle P_V \rangle \equiv \int dV\, G(V, V_0, \Delta V) P_V \tag{60}$$

で与えられる（P_V は (23) で定義）。G による V 平均を $\langle\ \rangle$ で表した。(26) を用いると、

$$P = \int d\tau \int d\tau' D[\tau;\tau'] \tag{61}$$

$$D[\tau;\tau'] \equiv \langle D_V[\tau;\tau'] \rangle \tag{62}$$

となる。主張1と主張2を今の場合にまで広げることは、(61) から出発して2.4節の考え方を繰り返すことにより容易になされる。まず、主張1は

$$\left\langle \lim_{t\to\infty} \int_d^\infty dx \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, \Psi_V(x, t|\tau) \right|^2 \right\rangle \approx P \text{ for } {}^\forall\tau_1 < \tau_< \text{ and } {}^\forall\tau_2 > \tau_> \tag{63}$$

となるような $\tau_<$ と $\tau_>$ を用いて行えばよい。弱い非干渉条件は

$$\mathrm{Re}D[\tau;\tau'] = \delta(\tau - \tau')P(\tau) \tag{64}$$

となり、これが成立するならばトンネル時間の確率密度 $P(\tau)$ が定義できると主張する（主張2）。

以上の主張を実際に行うには、V 平均を実行しなければならない。以後、(29) で定義される変数 $\tau_\pm$ に移って考え、$D[\tau;\tau']$ を $\tau_\pm$ で表したものを $D(\tau_-, \tau_+)$ と記す。$D(\tau_-, \tau_+) = \langle D_V(\tau_-, \tau_+) \rangle$ である。(33) と (36) から、$D_V(\tau_-, \tau_+)$ の V 依存性は $e^{-iV\tau_-/\hbar}$ という単純な形であることがわかる[24]。従って、(62) の右辺の V 平均を具体的に書き下したとき、V に関する積分は

$$\int dV\, G(V, V_0, \Delta V) e^{-iV\tau_-/\hbar} \tag{65}$$

となる。これは G のフーリエ変換であるから $\tau_- = 0$ の周囲

$$\Delta\tau \equiv \hbar/\Delta V \tag{66}$$

ほどの範囲で目立った値を取る。ゆえに $D(\tau_-, \tau_+)$ は $|\tau_-| < \Delta\tau$ ほどの限られた領域で目立った値を取る。特に

$$G = G(V - V_0, \Delta V) \tag{67}$$

[24] これは (17) に由来している

と書ける場合（以後この場合に限る）には、(50) を用いることで簡単な結果

$$D(\tau_-,\tau_+) = \int dV\, G(V-V_0,\Delta V)e^{-i(V-V_0)\tau_-/\hbar}D_{V_0}(\tau_-,\tau_+) \tag{68}$$

$$= \mathcal{G}(\tau_-)D_{V_0}(\tau_-,\tau_+) \tag{69}$$

を得る。$\mathcal{G}$ は G のフーリエ変換

$$\mathcal{G}(\tau_-) \equiv \int dV\, G(V,\Delta V)e^{-iV\tau_-/\hbar} \tag{70}$$

であり、$\tau_-=0$ の周囲 $\Delta\tau$ ほどの範囲で目立った値を取る。従って (69) は次のことを意味する。「$\Delta\tau$ よりも十分大きな時間スケールでは、$D(\tau_-,\tau_+)$ の値は τ_+ 軸上に集中しているように見える。」つまりある関数 $F(\tau_+)$ があって次式が成り立つように見える。

$$D(\tau_-,\tau_+) = \delta(\tau_-)F(\tau_+) \tag{71}$$

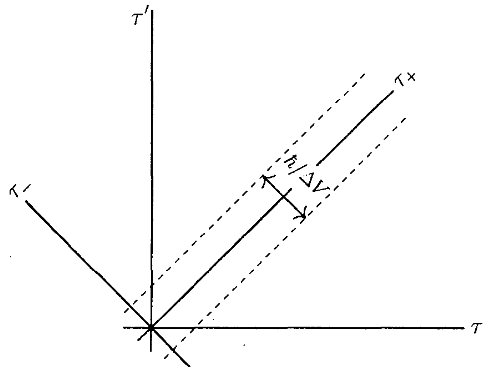


図 6: 障壁の高さの揺らぎは、非干渉汎関数の τ_+ 軸付近への集中を引き起こす。

(71) から逆に F は

$$F(\tau_+) = \int d\tau_-\, D(\tau_-,\tau_+) \tag{72}$$

と決まり、これは実数である。(71) は非干渉条件の形をしている。そこで「$\Delta\tau$ よりも十分大きな時間スケールで見ると非干渉条件が成り立っており、（主張 2 の精神に沿って）F はそのような時間スケールにおけるトンネル時間の確率密度である」と主張したくなる。しかし次の二点に注意しなければならない。

（1）F は正定値であるとは限らない。

（2）$\Delta\tau$ よりも小さい時間スケールにおいて F は意味を持たない。

これらの点を踏まえて F を「擬分布」と呼ぶことにする。(61) により

$$\int_0^\infty d\tau_+\, F(\tau_+) = P \tag{73}$$

が成立する。1に規格化された

$$\widetilde{F}(\tau_+) \equiv F(\tau_+)/P \tag{74}$$

を定義しよう。これは透過粒子のみに母集団を制限した「条件付き擬分布」である。さて上の（2）の注意にしたがって、τ_+ 軸を互いに重ならない領域 Δ_j（$\Delta_j > \Delta\tau$）に分割し、

$$\widetilde{F}_j \equiv \int_{\Delta_j} d\tau_+ \, \widetilde{F}(\tau_+) \tag{75}$$

を考えよう。各区間の幅は j によって異なっていてよい。(73) により次式が成り立つ。

$$\sum_j \widetilde{F}_j = 1 \tag{76}$$

$\widetilde{F}$ が実質的に正定値であるならば、全ての j に対して実質的に $0 < \widetilde{F}_j < 1$ が成立する。しかし粗視化以前の裸の $\widetilde{F}(\tau_+)$ には意味がないことを考えると、たとえ $\widetilde{F}$ 自身は正定値と見なせなくても、最終的に $\widetilde{F}_j$ が全ての j に対して実質的に $0 < \widetilde{F}_j < 1$ でありさえすれば、$\Delta\tau$ よりも粗い時間スケールで確率を導入するためには十分である。そこで次の主張を行う。

主張3：$\widetilde{F}_j$ が全ての j に対して $0 < \widetilde{F}_j < 1$ と見なせるならば、$\Delta\tau$ よりも粗い時間スケールにおいて、トンネル時間の確率を考えることができる。トンネル時間が Δ_j（$\Delta_j > \Delta\tau$）の範囲にある確率は $\widetilde{F}_j$ で与えられる。

$0 < \widetilde{F}_j < 1$ と見なせないような j が一つでもあるときにはどうするか？これは $\widetilde{F}$ が正定値と見なせないときには普通に起こる。もし区間 Δ_j の取り方（幅）を変えることにより全ての j に対して $0 < \widetilde{F}_j < 1$ と見なせるようにできるならば、そのような区間を選択して主張3を行えばよいであろう。これは受け入れがたいかもしれない。区間の取り方によって確率が定義できたりできなかったりするのは一見不自然だからである。しかし「障壁中で異なる時間を過ごす経路は干渉的である」ということに戻って考えてみると、「区間を注意深く選んだときには干渉が消えて確率的記述ができる」ということがあっても不思議ではない。

ここで主張1に戻ってみよう。(63) の左辺が

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau' D[\tau;\tau'] \tag{77}$$

と表せることに注意して、以前図5のところで行った議論を繰り返す。そうすると、主張1を行う際の $\tau_<$ と $\tau_>$ は、(63) から求める代わりに、

$$\int_{\tau_{+_1}}^{\tau_{+_2}} d\tau_+ \, F(\tau_+) \approx P \text{ for } {}^\forall\tau_{+_1} < \tau_{+_<} \text{ and } {}^\forall\tau_{+_2} > \tau_{+_>} \tag{78}$$

となるような $\tau_{+_<}$ と $\tau_{+_>}$ から、$\tau_< \sim \tau_{+_<}$、$\tau_> \sim \tau_{+_>}$ によって求めればよいことがわかる。すなわち主張1は次のように言える。

擬分布 $F(\tau_+)$ の拡がりの幅はトンネル時間の拡がりの幅を与える。

これは 2.4.1 節の最後に述べたことと同じ形をしている。実際、V が一定のときに定義した F_V と本節で定義した F は

$$F(\tau_+) = \langle F_V(\tau_+) \rangle \tag{79}$$

の関係で結ばれている。これは (30) と (62) からすぐにわかる。初期条件、透過振幅、障壁の高さの分布関数を使って F を明示すると、

$$F(\tau_+) = \int dV\, G(V-V_0, \Delta V) \int_{\Delta k} dk\ |\psi(k)|^2 \int \frac{dV_-}{2\pi\hbar}\, e^{iV_-\tau_+/\hbar} T^*(V-V_-/2, k) T(V+V_-/2, k) \tag{80}$$

となる。$F_V(\tau)$ は F の特別な場合（G がデルタ関数の場合）と見ることができる。また、単色的な初期条件は波束的初期条件の特別な場合（$|\psi(k)|^2$ がデルタ関数の場合）と見ることができる。従って主張 1 は、(79) の上に書いたように、波束的初期条件のもとで V が揺らぐ場合について述べておけば十分である。一応、それぞれの場合の F を下にまとめておく。

障壁の高さ ＼ 初期条件	単色	波束
一定	$F_{V,k}$, (39)	F_V, (37)
不定	F_k, (81)	F, (80)

各 F の表式を参照するときのために式番号を併記した。ここで、

$$F_k(\tau_+) \equiv \langle F_{V,k}(\tau_+) \rangle \tag{81}$$

このように、トンネル時間の拡がりの幅を求めるためには、この表の中から考えている状況に応じた F を選び、それを数値的にプロットしてその拡がりを調べればよい。また、主張 3 を行うときにも、状況に応じた F を用いればよい。なお、(73) において、例えば $F = F_{V,k}$ のときには $P = P_{V,k}$ であり、$F = F_V$ のときには $P = P_V$ である。1 に規格化された $\tilde{F}$ を構成するときにはこの点に注意する。ところで、上の表の中で擬分布と呼んでよいものは、障壁の高さが揺らぐ場合の F_k と F である。なぜならば、擬分布を考えることができるのは非干渉汎関数が τ_+ 軸の周辺のみで目立った値を取る場合だからである。障壁の高さが揺らぐ場合はそうなるが、障壁の高さが一定のときにそのようになる理由は一般にはない。

主張 3 によって導入される確率 $\tilde{F}_j$ を、「粗視化されたトンネル時間に対する近似的確率」と呼ぶことができよう。「粗視化された」というのは $\tilde{F}$ が $\Delta\tau$ より大きな幅で積分されていることを指し、「近似的」というのは一般的に $0 < \tilde{F}_j < 1$ が全ての j に対して厳密に成り立つわけではないことを指している。主張 1 も「トンネル時間が $(\tau_<, \tau_>)$

の範囲に拡がっている確率がほぼ1である」という言い方をすると、やはり近似的確率を導入していることになる。近似的確率は厳密な意味（確率公理を満たすという意味）での確率ではない。そういう「数学的に厳密ではないもの」を導入することは反発を招くかもしれない。しかし、そもそもトンネル確率（透過確率や反射確率）自体、ある意味で近似的確率である。波束によるトンネルを考えた場合、無限大の時間が経たない限り、障壁の中でも非常にわずかではあるが波動関数は値を持つ。従って、障壁の前後に粒子を見出す確率の和は厳密には1にならない。「無限大の時間経過」というのは数学的理想化であるから、物理的にはトンネル確率は近似的にしか定義できないことになる。また、図4の状況で、「粒子が幅 d_c の中を通ってきた確率がほぼ1である」という命題には明確な物理的意味が付随している（すなわち、d_c 以外の部分を隠してもスクリーン上の模様にほとんど変化は生じない）。このような考察から、「近似的確率」の導入に対して「それは数学的意味において厳密な確率ではない」という理由で反対することは、物理的には非生産的であると著者は思う。本論で展開した議論の本質的な部分は、トンネル時間に限らず干渉的選択肢一般に対して当てはまる。「干渉的選択肢に対しては厳密な意味の確率は定義できないが、近似的確率なら定義できる」ということは物理的に十分生産的なことだと著者は思う。量子力学のオブザーバブル（位置、運動量など）は、「それに対しては厳密な意味の確率が定義できる」という点で特殊な位置を占めているが、それは完全性と直交性のためである。干渉的選択肢は直交性を持たないので、確率（近似的）を定義するためには「粗視化」の手続きが必要となる。粗視化の幅が0である（すなわち粗視化しなくてよい）という特殊な選択肢がオブザーバブルにほかならない。こうして、確率を定義する対象を干渉的選択肢にまで広げることで、逆にオブザーバブルの特殊性が浮き彫りになる。

量子力学は軌道概念に基づいた決定論を放棄して確率を導入したが、その際オブザーバブルに対する「厳密な意味での確率」のみが採用された。確率的記述は決定論より「緩い記述」である。近似的確率を用いた「もう一段緩い記述」を受け入れることで、自然に対するより深い理解が可能となるのではなかろうか。量子力学の枠組みの拡張が必要になったときにも、案外このような点が重要になるかもしれない。

4 薄くて高い障壁の場合

前節までに展開してきた考えに従って、「薄くて高い障壁」の場合のトンネル時間を数値的に調べた結果を紹介する[25]。障壁の高さはガウス分布

$$G(V-V_0,\Delta V)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta V}\exp[-((V-V_0)/\Delta V)^2] \tag{82}$$

[25] 薄くて高い障壁を調べた理由は、その場合に近似的な解析計算がある程度可能だからである（ここではそれには言及しない）。以下で示すグラフは全くの数値計算の結果である。

に従うとした。初期条件は単色的（波数k）な場合を考えた。以下の無次元パラメータを導入する。

$$a \equiv kd, \quad u \equiv \frac{V}{E}, \quad \Delta u \equiv \frac{\Delta V}{E}, \quad t \equiv \frac{\tau_+}{d/v} \quad (v = \frac{\hbar k}{m}) \tag{83}$$

下の図は$a = 0.1$で$u_0 = 100$の場合に、Δuを変えながら、1に規格化した$\widetilde{F}$をプロットしたものである。横軸は古典自由粒子の領域通過時間（以後、古典的通過時間と呼ぶ）を単位に取っている。（左のグラフの$\widetilde{F}_{V,k}$を擬分布と呼ぶのは本当は適当ではない。）

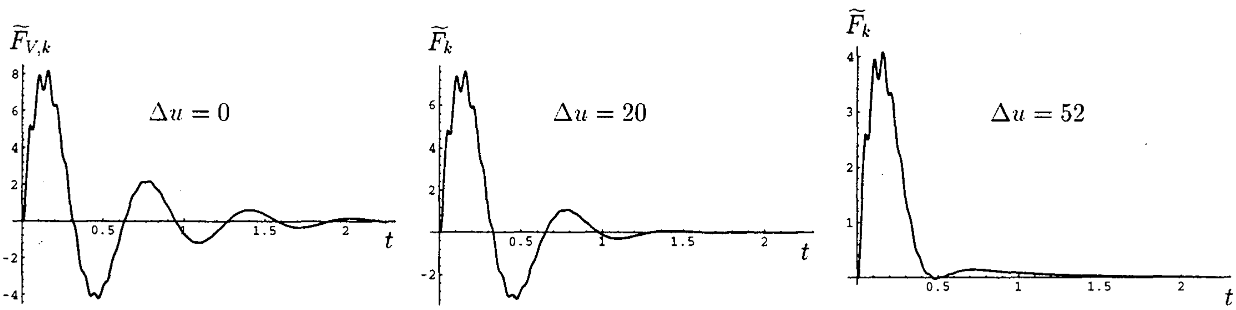


図 7: 薄くて高い障壁の場合のトンネル時間の条件付き擬分布。

注目すべきは$t_>$は障壁の高さの揺らぎが大きくなるほど小さくなることである。$\Delta u = 0$の場合は、$t_> \sim 2$であったのが、$\Delta u = 20$の場合には$t_> \sim 1$、$\Delta u = 52$では$t_> \sim 0.5$である。一方いずれの場合も$t_< \sim 0$と読みとれる。従って、「揺らぎが大きくなるほど、トンネル時間の拡がりの幅は小さくなる」と言える。興味深いことに、Δuがほぼ52以上になるとFは実質的に正定値となる。しかしそのような大きな揺らぎの場合、入射粒子のエネルギーよりも低い障壁も現れるようになってくるので、純粋に「トンネル」とは呼べない状況になる。したがって右のグラフはトンネル時間の擬分布というよりは、より一般的に領域通過時間の擬分布と考えるべきである。(66)で与えられる「トンネル時間の粗視化の幅$\Delta\tau$」は古典的通過時間を単位とすると、$\Delta t \equiv (a\Delta u)^{-1}$である。主張3を行うには、中央と右のグラフを$\Delta t$よりも十分大きなスケールで見なければならない。十分大きなスケールとして例えば$10\Delta t$を取ったとすると、$\Delta u = 20$の場合には$10\Delta t = 5.0$、$\Delta u = 52$の場合には$10\Delta t = 1.9$となる。中央と右のグラフはともに$10\Delta t$の中におさまってしまい、主張3は主張1を越える主張とはならない。つまり今の場合にはトンネル時間に関してはその拡がりの幅以上のことは言えない。しかし、その幅が障壁の高さの揺らぎによって狭くなることは「トンネル時間の制御」の観点から非常に興味深いものである。

これ以外の結果は他の機会にゆずりたい。本論で展開したファインマン経路によるアプローチは興味深い結果を生み出しつつあり、これにより従来のアプローチを越えた理解がトンネル時間の問題にもたらされると著者は期待している。

謝辞

長年に渡って議論していただき、励ましていただいた高木伸助教授に感謝いたします。本研究は理化学研究所における基礎科学特別研究員制度のもとでなされた研究であり、研究費をはじめとするさまざまな支援に対して厚く感謝いたします。

参考文献

[1] E. H. Hauge and J. A. Støvneng, Rev. Mod. Phys. **61**, 917 (1989).

[2] R. Landauer and T. Martin, Rev. Mod. Phys. **66**, 217 (1994).

[3] V. S. Olkhovsky and E. Recami, Phys. Rep. **214**, 339 (1992).

[4] C. R. Leavens and G. C. Aers, in *Scanning Tunneling Microscopy and Related Methods*, edited by R. J. Behm, N. Garcia, and H. Rohrer (Kluwer, Dordrecht, 1990), p. 59.

[5] M. Büttiker, in *Electronic Properties of Multilayers and Low Dimensional Semiconductor Structures*, edited by J. M. Chamberlain, L. Eaves, and J. C. Portal (Plenum, New York, 1990), p. 297.

[6] M. Jonson, in *Quantum Transport in Semiconductors*, edited by D. K. Ferry and C. Jacoboni (Plenum, New York, 1991), p. 193.

[7] A. P. Jauho, in *Hot Carriers in Semiconductor Nanostructures: Physica and Applications*, edited by J. Shah (Academic, Boston, 1992), p. 121.

[8] 高木伸, パリティ **8**, 68 (1993).

[9] D. Bohm, *Quantum Theory* (Prentice-Hall, New York, 1951).

[10] E. P. Wigner, Phys. Rev. **98**, 145 (1955).

[11] T. E. Hartman, J. Appl. Phys. **33**, 3427 (1962).

[12] M. Büttiker and R. Landauer, Phys. Rev. Lett. **49**, 1739 (1982).

[13] S. Takagi, in *Proceedings of the 4th International Symposium on the Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology, Tokyo, 1992* (JJAP Series 9), edited by M. Tsukada *et al.* (JJAP, Tokyo, 1993), p. 82.

[14] V. F. Rybachenko, Sov. J. Nucl. Phys. **5**, 635 (1967).

[15] M. Büttiker, Phys. Rev. B **27**, 6178 (1983).

[16] D. Sokolovski and J. N. L. Connor, Phys. Rev. A **44**, 1500 (1991).

[17] D. Sokolovski and J. N. L. Connor, Solid State Commun **89**, 475 (1994).

[18] D. Sokolovski, S. Brouard, and J. N. L. Connor, Phys. Rev. A **50**, 1240 (1994).

[19] H. A. Fertig, Phys. Rev. Lett. **65**, 2321 (1990).

[20] H. A. Fertig, Phys. Rev. B **47**, 1346 (1993).

[21] A. Auerbach and S. Kivelson, Nucl. Phys. B **257**, 799 (1985).

[22] P. van Baal, in *Lectures on Path Integration: Trieste 1991*, edited by H. A. Cerdeira *et al.* (World Scientific, Singapore, 1993).

[23] N. Yamada, to be published in the *Proceedings of the 8th Marcel Grossmann Meeting*, Hebrew Univ., Jerusalem, 1997, (World Scientific, Singapore).

[24] R. B. Griffiths, J. Stat. Phys. **36**, 219 (1984).

[25] R. Omnès, J. Stat. Phys. **53**, 933 (1988).

[26] M. Gell-Mann and J. B. Hartle, in *Proceedings of the 3rd International Symposium on the Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology*, edited by S. Kobayashi, H. Ezawa, Y. Murayama, and S. Nomura (Physical Society of Japan, Tokyo, 1990).

[27] N. Yamada and S. Takagi, Prog. Theor. Phys. **85**, 985 (1991).

[28] D. Sokolovski and J. N. L. Connor, Phys Rev. A **47**, 4677 (1993).

[29] D. Sokolovski, Phys. Rev. A **52**, R5 (1995).

[30] D. Sokolovski, Phys. Rev. Lett. **79**, 4946 (1997).

[31] D. Sokolovski, Phys. Rev. A **57**, R1469 (1998).

[32] N. Yamada, Phys. Rev. A **54**, 182 (1996).